Matrisin Tersi :

Tam ranklı bir kare matrise non-singüler (tekil olmayan) matris denir. Tekil olmayan bir A matrisi A^{-1} ile ifade edilen tek bir terse sahiptir.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

A matrisi tam ranklı olmayan bir kare matris ise A'nın tersi yoktur ve singüler (tekil) matristir.

$$(A^{-1})^{-1} = A$$ dır.

Ters matrislerin iki özelliği aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 1.5a:

Eğer A tekil olmayan bir kare matris ise A' de tekil olmayan bir matristir ve tersi aşağıdaki gibi bulunur.

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'$$

Teorem 1.5b:

Eğer A ve B matrisleri aynı boyutta ve tekil olmayan matrisler ise AB de tekil olmayan bir matristir ve

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

eşitliği vardır.

Pozitif Tanımlı Matrisler

A simetrik bir matris ve y bir vektör olsun.

$$y'Ay = \sum a_{ii} y_i^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij} y_i y_j \quad \text{kuadratik (karesel)}$$

form olduğunu biliyoruz. Örneğin,

$$3y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2 + 4y_1y_2 + 5y_1y_3 - 6y_2y_3$$

karesel formu aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$3y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2 + 4y_1y_2 + 5y_1y_3 - 6y_2y_3 = y'Ay$$

olsun. Burada,

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{dir.}$$

Bununla birlikte aynı karesel form simetrik matris cinsinden de ifade edilebilir.

$$\frac{1}{2}(A + A') = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5/2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5/2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Genelde, herhangi bir $(y'Ay)$ karesel formu,

$$y'Ay = y'\left(\frac{A+A'}{2}\right)y$$ şeklinde ifade

edilebilir ve böylece bir karesel form matrisi her zaman simetrik bir matris şeklinde seçilebilir.

Bu tür karesel formlar y'nin tüm olası değerleri için pozitiftir. Eğer A matrisi $y'Ay \geq 0$ özelliğine sahip ise ($y=0$ hariç) tüm mümkün y'ler için, $y'Ay$ karesel formuna pozitif tanımlıdır denir ve $y'Ay=0$ eşitliğini sağlayan en az bir $y \neq 0$ varsa $y'Ay$ ve A'ya pozitif yarı tanımlıdır denir.

ÖRNEK

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$ matrisi verilsin.

$y' = (y_1 \;\; y_2)$ vektör.

$$y'Ay = (y_1 \;\; y_2)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$y'Ay = 2y_1^2 - 2y_1y_2 + 3y_2^2 > 0$$

$= 0$

1.7. Denklem Sistemleri

p bilinmeyenli n tane lineer denklem sistemi,

$$
\left.
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = c_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = c_n
\end{array}
\right)
$$

şeklinde yazılır. $Ax = c$ şeklinde matris ile gösterilebilir. Burada, $A_{n \times p}$; $x_{p \times 1}$ ve $c_{n \times 1}$ boyutludur. Eğer;

$n \neq p$ ise x ve c'nin boyutu farklıdır.

$n > p$ ise $Ax = c$'nin çözümü yoktur.

$n < p$ ise $Ax = c$ sonsuz sayıda çözüm vardır.

$Ax = c$ denklem sistemi bir veya birden fazla çözüm vektörüne sahip ise tutarlıdır denir.

Eğer denklem sisteminin çözümü yok ise tutarsızdır denir.

Teorem

$Ax = c$ denklem sistemi ancak ve ancak $\text{rank}(A) = \text{rank}(A, c)$ ise en az bir çözüme sahiptir.

ÖRNEK

$$x_1 + 2x_2 = 4$$
$$x_1 - x_2 = 1$$
$$x_1 + x_2 = 3$$

veya

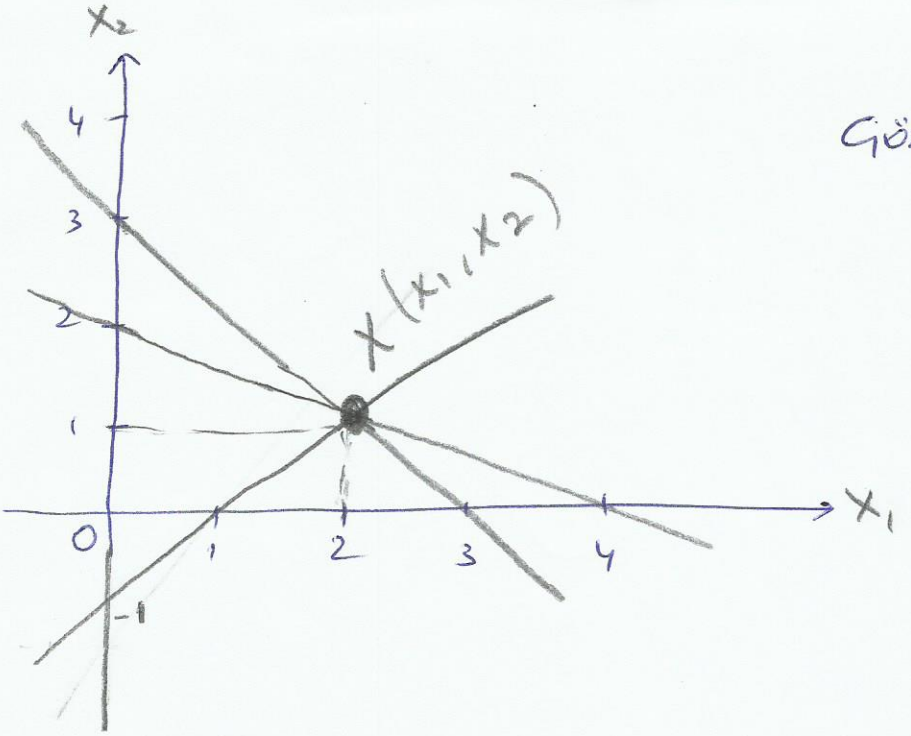
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(A, c) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$ verilir.

Bu matrisin rankı 2'dir. Çünkü; üçüncü sütun ilk sütunun iki katı ile ikinci sütunun toplamına eşittir.

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\text{rank}(A) = \text{rank}(A, c) = 2$ olduğundan bu denklem sisteminin en az bir çözümü vardır.



Çözüm $\Rightarrow$ $x = (2,1)$ noktasıdır.

ÖRNEK

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}\right\}$$ denklemleri verilsin.

İlaveli matrisi;

$$(A, c) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ olur.

Bu matrisi rankı 3'tür.

$\text{rank}(A, c) = 3 \neq \text{rank}(A) = 2$ olduğundan denklem sistemi tutarsızdır.

Çözüm yok.